Défi TRIGO 01 **Formules des angles associés**

On pose :

$$\boldsymbol{A = \cos\left(1 \times \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right)}$$
$$\boldsymbol{B = \cos\left(1 \times \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3 \times \frac{\pi}{4}\right)}$$
$$\boldsymbol{C = \cos\left(1 \times \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(3 \times \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(4 \times \frac{\pi}{5}\right)}$$

Vérifier que $\boldsymbol{A = 0}$ et $\boldsymbol{B = 0}$.
En rappelant la formule des angles associés utilisée, calculer $\boldsymbol{C}$.

<u>Corrigé</u>

$$A = \cos\left(1 \times \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$
$$B = \cos\left(1 \times \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3 \times \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$
$$C = \cos\left(1 \times \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(3 \times \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(4 \times \frac{\pi}{5}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

On a :

$$\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi + 4\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} = \pi$$

donc :

$$\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$$

de même :

$$\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \frac{2\pi + 3\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} = \pi$$

donc :

$$\frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5}$$

D'où

$$C = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right)$$

Or, pour tout réel x on a : $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, donc :

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \text{ et } \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

On obtient :

$$C = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0$$

Finalement : $C = 0$.

Défi TRIGO 02 **Formules des angles associés**

On pose :

$$\boldsymbol{A = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right), B = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \text{ et } C = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)}$$

Vérifier que $\boldsymbol{A = 0}$ et $\boldsymbol{B = 0}$.
En rappelant la formule des angles associés utilisée, calculer $\boldsymbol{C}$.

<u>Corrigé</u>

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$
$$B = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$
$$C = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$$

On a :

$$\frac{6\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{6\pi - \pi}{5} = \frac{5\pi}{5} = \pi$$

donc :

$$\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$$

On en déduit que :

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)$$

Or, pour tout réel x : $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ donc : $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

On e en déduit que :

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$$

Finalement : $C = 0$.

Défi TRIGO 03 **Formules des angles associés**

En rappelant les formules des angles associés utilisée, calculer :

$$A=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

Corrigé

On a d'une part :

$$\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{4\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$$

donc :

$$\frac{5\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$$

et d'autre part :

$$\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}=\frac{4\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$$

donc :

$$\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$$

Or,

- pour tout réel x on a $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ $(*)$
- pour tout réel x on a : $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ $(**)$.

On a :

$$\begin{aligned}A&=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\quad\text{(en utilisant } (*) \text{ et } (**))\\&=0\end{aligned}$$

Finalement : $A=0$.

Défi TRIGO 04 **Formules des angles associés**

On pose :

$$\boldsymbol{A=\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{13\pi}{30}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{13\pi}{30}\right)}$$

En rappelant la formule des angles associés utilisée, calculer A.

Corrigé

On a :

$$\frac{\pi}{15}+\frac{13\pi}{30}=\frac{2\pi}{30}+\frac{13\pi}{30}=\frac{15\pi}{30}=\frac{\pi}{2}$$

donc :

$$\frac{13\pi}{30}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{15}$$

Or,

- pour tout réel x, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{15}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)$ $(*)$
- pour tout réel x, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{15}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)$ $(**)$

On a :

$$\begin{aligned}A&=\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{13\pi}{30}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{13\pi}{30}\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{15}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{15}\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)\quad\text{(en utilisant } (*) \text{ et } (**))\\&=\cos^2\left(\frac{\pi}{15}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{15}\right)\end{aligned}$$

Or, pour tout réel x, on a : $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{15}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{15}\right)=1$

Finalement : $A=1$.

Défi TRIGO 05 **Équation trigonométrique**

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation : $2\sin^2(x)+2=5\sin(x)$.

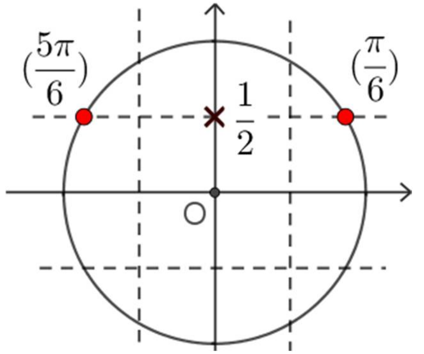
Corrigé

L'équation $2\sin^2(x)+2=5\sin(x)$ s'écrit aussi : $2\sin^2(x)-5\sin(x)+2=0$.
En posant $X=\sin(x)$, elle devient : $2X^2-5X+2=0$.
$2X^2-5X+2$ est de la forme aX^2+bX+cavec $a=2$,$b=-5$ et $c=2$, de discriminant $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(2)(2)=25-16=9$.
$\Delta>0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+5-\sqrt{9}}{2(2)}=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$
$$X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+5+\sqrt{9}}{2(2)}=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2$$

$$X = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$



ou

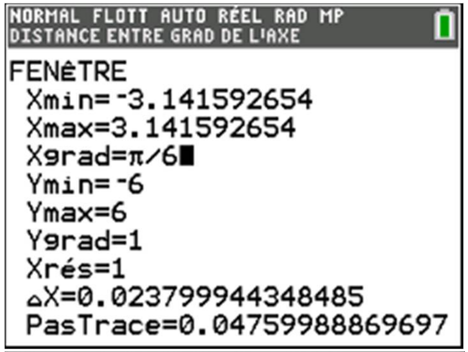
$$X = 2$$

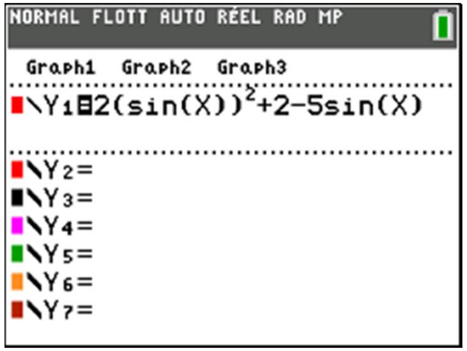
$$\sin(x) = 2$$

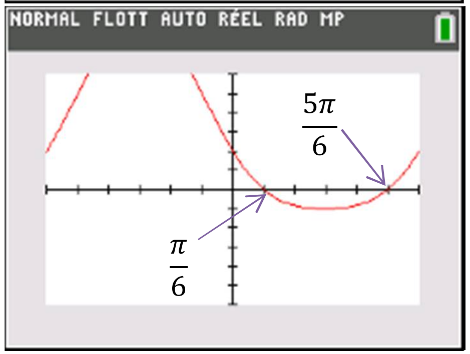
$$2 \notin [-1;1]$$

donc équation impossible

Conclusion : $S_{]-\pi;\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right\}$.







Défi TRIGO 06 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \times (\sin x - \cos x) + \cos x \times (\sin x + \cos x) = 1$.

Corrigé

Rappel $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $(*)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$\sin x \times (\sin x - \cos x) + \cos x \times (\sin x + \cos x)$

$= \sin^2 x - \sin x \times \cos x + \cos x \times \sin x + \cos^2 x$

$= \sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \times \cos x + \sin x \times \cos x$

$= 1 + 0$ (en utilisant $(*)$)

$= 1$

On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \times (\sin x - \cos x) + \cos x \times (\sin x + \cos x) = 1$.

Défi TRIGO 07 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Démontrer que pour tout réel x : $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.

Corrigé

Rappel $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $(*)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$

$= \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x$

$= 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$

$= 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$= 2 \times 1$ (en utilisant $(*)$)

$= 2$

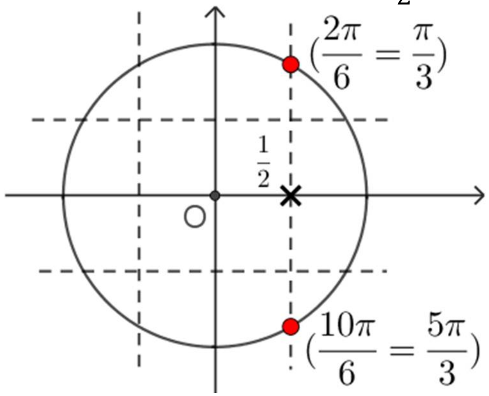
On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}, (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.

Défi TRIGO 08 **équation trigonométrique**

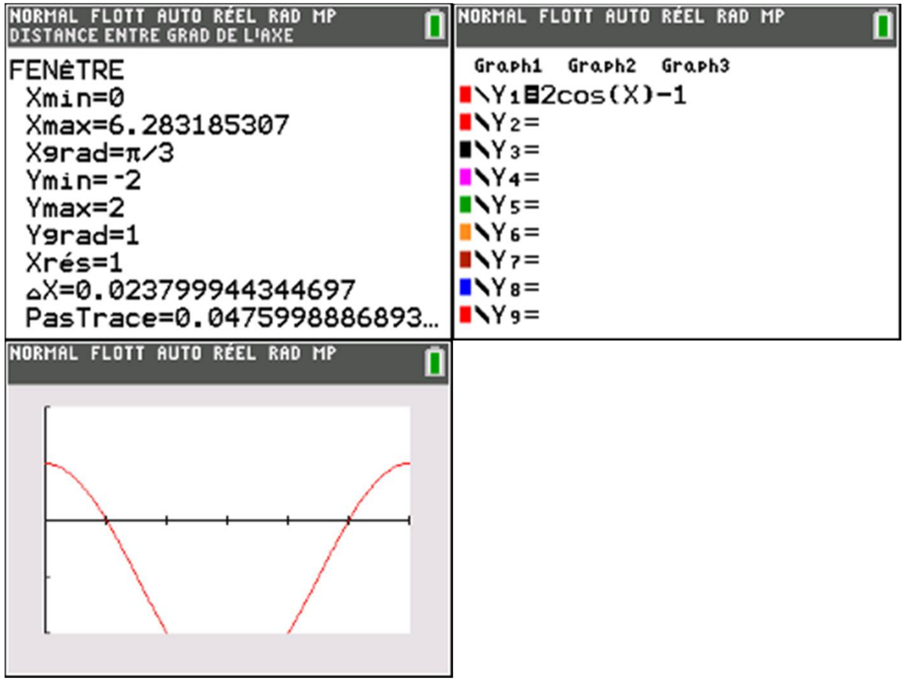
Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation : $2\cos(x)-1=0$.

Corrigé

$2\cos(x)-1=0 \Leftrightarrow 2\cos(x)=1 \Leftrightarrow \cos(x)=\dfrac{1}{2}$



$S_{[0;2\pi]}=\left\{\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3}\right\}$



Défi TRIGO 09 **équation trigonométrique**

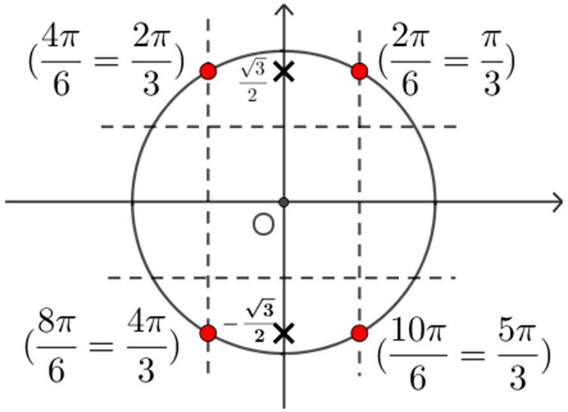
Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation : $4\times\sin^2 x-3=0$.

Corrigé

$4\times\sin^2 x-3=0 \Leftrightarrow (2\sin(x))^2-(\sqrt{3})^2=0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin(x)+\sqrt{3}\right)\left(2\sin(x)-\sqrt{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin(x)+\sqrt{3}=0 \text{ ou } 2\sin(x)-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \sin(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \sin(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$S_{[0;2\pi]}=\left\{\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{4\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3}\right\}$